PROBABILIDADES - 2º Ano MAEG **20. 06. 2017**

TESTE REFERENTE À 1ª PARTE

Nome:____**Número:**_________

Cotação: (Espaço reservado para classificações)

1. (15)	**2a. (10)**	**3a.(10)**	**4.a (20)**	**5. (10)**
	2b. (10)	**3b.(15)**	**4.b (10)**	

Nota: todas as questões devem ser devidamente formalizadas e justificadas.

1. **[15]** O André apanha todos os dias de manhã um autocarro do Largo do Rato para o ISEG. Sempre que chega à paragem antes das 8:00, consegue lugar sentado 70% das vezes, baixando essa percentagem para 10% quando chega à paragem depois das 8:00. Sabemos que o André arranja lugar sentado em 40% destas viagens. Qual a probabilidade de o André chegar antes das 8:00 à paragem? E se souber que o André conseguiu um lugar sentado?

Sejam os acontecimentos: S o André consegue lugar sentado; H o André chega ao largo do Rato antes das 8h. Sabe-se $P(S \mid H)=0.7$, $P(S \mid \bar{H})=0.1$ e $P(S)=0.4$. Assim,

$P(S)=P(S \mid H)\times P(H)+P(S \mid \bar{H})\times P(\bar{H}) \Leftrightarrow 0.4=0.7\times P(H)+0.1\times(1-P(H))$ e portanto $P(H)=0.5$.

$$P(H \mid S)=\frac{P(H\cap S)}{P(S)}=\frac{P(S \mid H)\times P(H)}{P(S)}=\frac{0.7\times 0.5}{0.4}=\frac{7}{8}$$

2. Considere uma variável aleatória X cuja função de distribuição é dada por $F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1-(1+x)^{-2} & x\geq 0\end{cases}$

   a. **[10]** Obtenha a mediana de X e determine $P(X>3 \mid X<5)$.

   A mediana m será tal que $F(m)=0.5$, isto é, $0.5=1-\frac{1}{(1+m)^2} \Leftrightarrow \frac{1}{(1+m)^2}=0.5 \Leftrightarrow (1+m)^2=2$ logo

   $m=\sqrt{2}-1\approx 0.4142$ (só a raiz positiva interessa)

   $$P(X>3 \mid X<5)=\frac{P(3<X<5)}{P(X<5)}=\frac{F(5)-F(3)}{F(5)}=\frac{(35/36)-(15/16)}{35/36}=1-\frac{36\times 15}{16\times 35}=\frac{1}{28}=0.0357 \text{ b)}$$

   b. **[10]** Seja $Y=2X+2$. Obtenha a função de distribuição de Y.

   $$F_Y(y)=P(Y\leq y)=P(2X+2\leq y)=P(X\leq (y-2)/2)=F_X\left(\frac{y-2}{2}\right)$$
   $$=1-\frac{1}{(1+(y-2)/2)^2}=1-\frac{4}{y^2}$$
   para $y\geq 2$ e $F_Y(y)=0$ para $y<2$

3. A "FashionGlass" disponibiliza aos seus clientes a possibilidade de fazer um seguro contra quebra ou roubo dos óculos de gama alta comprados na sua loja. Seja (X,Y) uma variável aleatória em que X representa o número de óculos de gama alta vendidos semanalmente nessa loja e Y o número de seguros contratados, com função de probabilidade conjunta dada pela tabela

$x \setminus y$	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**
0	0.2	0	0	0	0
1	0.12	0.18	0	0	0
2	0.04	0.12	0.09	0	0
3	0.01	0.04	0.07	0.03	0
4	0.01	0.02	0.03	0.03	0.01

a. **[10]** Calcule $P(X>3, Y\geq 1)$ e $P(X-Y>0)$.

$$P(X>3, Y\geq 1)=0.09\ ;\ P(X-Y>0)=P(X>Y)=0.18+0.18+0.1+0.03=0.49$$

b. **[15]** Calcule $E(Y\mid X=3)$ e interprete o seu significado. Calcule também $\operatorname{var}(Y)$.

$$E(Y\mid X=3)=\frac{0\times 0.01+1\times 0.04+2\times 0.07+3\times 0.03+4\times 0}{0.01+0.04+0.07+0.03+0}=\frac{0.27}{0.15}=\frac{9}{5}$$

$$E(Y)=0\times 0.38+1\times 0.36+2\times 0.19+3\times 0.06+4\times 0.01=0.96$$

$$E(Y^2)=0^2\times 0.38+1^2\times 0.36+2^2\times 0.19+3^2\times 0.06+4^2\times 0.01=1.82$$

$$\operatorname{var}(Y)=E(Y^2)-\left(E(Y)\right)^2=1.82-0.96^2=0.8984$$

4. Seja (X,Y) uma variável aleatória bidimensional contínua com função de densidade conjunta dada por $f(x,y)=k\,x^2 y$, $0<x<y<2$.

a. **[20]** Mostre que $k=15/32$ e obtenha $f_Y(y)$ e $f_{X|Y=y}(x)$. Mostre que a função $f_{X|Y=y}(x)$ pode ser considerada uma função densidade.

k é tal que $\int_0^2\int_0^y k\,x^2 y\,dx\,dy=1$.

Ora $\int_0^2\int_0^y k\,x^2 y\,dx\,dy=k\int_0^2 y\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^y dy=\frac{k}{3}\int_0^2 y^4\,dy=\frac{k}{3}\left(\frac{y^5}{5}\right]_0^2=\frac{32k}{15}$ logo $k=\frac{15}{32}$

$$f_Y(y)=\int_0^y k\,x^2 y\,dx=k\,y\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^y=\frac{k\,y^4}{3}=\frac{5\,y^4}{32}\ ,\ 0<y<2$$

$f_{X|Y=y}(x)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\frac{k\,x^2 y}{k\,y^4/3}=3x^2y^{-3}$, $0<x<y$, $0<y<2$, y fixo

$f_{X|Y=y}(x)$ verifica as características de uma função densidade já que $f_{X|Y=y}(x)\geq 0, \forall x\in\Re$ e

$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y=y}(x)\,dx=1$ isto é $\int_{-\infty}^{+\infty} f_{X|Y=y}(x)\,dx=\int_0^y 3x^2y^{-3}\,dx=3\,y^{-3}\left(\frac{x^3}{3}\right]_0^y=3y^{-3}\frac{y^3}{3}=1$

b. **[10]** Calcule $P(X>0.5, Y>1)$ e $P(X<0.5\mid Y=1)$.

$$P(X>0.5,Y>1)=\int_1^2\int_{0.5}^y k\,x^2 y\,dx\,dy=k\int_0^2 y\left(\frac{x^3}{3}\right]_{0.5}^y dy=\frac{k}{3}\int_0^2 y\left(y^3-\frac{1}{8}\right)dy$$

$$=\frac{k}{3}\left(\frac{y^5}{5}-\frac{y^2}{16}\right]_0^2=\frac{5}{32}\left(\frac{32}{5}-\frac{4}{16}\right)=1-\frac{5}{128}=0.9609$$

$$P(X<0.5\mid Y=1)=\int_0^{0.5}3x^2\,dx=\left(x^3\right]_0^{0.5}=\frac{1}{8}=0.125$$

5. **[10]** Sendo A e B dois acontecimentos no mesmo espaço de probabilidade com $P(\overline{A})=\alpha$ e $P(\overline{B})=\beta$, prove que $P(A\cap B)\geq 1-\alpha-\beta$.

Sabe-se que $P(\overline{A})=\alpha$ e que $P(\overline{B})=\beta$.

$$P(A\cap B)=P(A)+P(B)-P(A\cup B)=(1-\alpha)+(1-\beta)-P(A\cup B)$$

$$=(1-\alpha-\beta)+\underbrace{\left(1-P(A\cup B)\right)}_{\geq 0}\quad \text{porque } 0\leq P(A\cup B\leq 1$$

$$\geq 1-\alpha-\beta$$